वास्तविक संख्याएँ

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म (परिचय)

प्रश्न 1 (आसान). 25 को 4 से भाग देने पर a = bq + r के रूप में लिखें।

उत्तर – 25 = 4 × 6 + 1

प्रश्न 2 (आसान). 30 को 7 से भाग देने पर शेषफल क्या होगा?

उत्तर – 2

प्रश्न 3 (मध्यम). अगर a = 47, b = 9, तो q और r क्या होंगे?

उत्तर – q = 5, r = 2

प्रश्न 4 (कठिन). एक संख्या को 6 से भाग देने पर भागफल 8 और शेषफल 3 आता है। वह संख्या क्या है?

उत्तर – 51

» अंकगणित की आधारभूत प्रमेय का परिचय

प्रश्न 5 (आसान). संख्या 36 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखें।

उत्तर – 2 × 2 × 3 × 3 (या $2^2 \times 3^2$)

प्रश्न 6 (आसान). संख्या 70 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखें।

उत्तर – 2 × 5 × 7

प्रश्न 7 (मध्यम). संख्या 140 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखें।

उत्तर – 2 × 2 × 5 × 7 (या $2^2 \times 5 \times 7$)

प्रश्न 8 (कठिन). संख्या 945 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखें।

उत्तर – 3 × 3 × 3 × 5 × 7 (या $3^3 \times 5 \times 7$)

» अभाज्य गुणनखंडन और गुणनखंड वृक्ष

प्रश्न 9 (आसान). 24 का अभाज्य गुणनखंडन गुणनखंड वृक्ष से करें।

उत्तर – 2 × 2 × 2 × 3

प्रश्न 10 (आसान). 75 का अभाज्य गुणनखंडन गुणनखंड वृक्ष से करें।

उत्तर – 3 × 5 × 5

प्रश्न 11 (मध्यम). 140 का अभाज्य गुणनखंडन गुणनखंड वृक्ष से करें।

उत्तर – 2 × 2 × 5 × 7

प्रश्न 12 (कठिन). 15625 का अभाज्य गुणनखंडन गुणनखंड वृक्ष से करें।

उत्तर – 5 × 5 × 5 × 5 × 5 × 5

» अंकगणित की आधारभूत प्रमेय की औपचारिक परिभाषा और अद्वितीयता

प्रश्न 13 (आसान). संख्या 20 का अभाज्य गुणनखंडन लिखिए।
उत्तर – 2 × 2 × 5 या $2^2 \times 5$

प्रश्न 14 (आसान). क्या 2 × 7 और 7 × 2 के गुणनखंडन अद्वितीयता प्रमेय के अनुसार समान हैं?
उत्तर – हाँ, वे समान हैं।

प्रश्न 15 (मध्यम). संख्या 48 का अभाज्य गुणनखंडन कीजिए और दिखाइए कि अभाज्य संख्याओं के क्रम बदलने पर भी गुणनखंडन अद्वितीय रहता है।
उत्तर – 48 = 2 × 2 × 2 × 2 × 3 या 2 × 3। अगर हम इसे 3 × 2 × 2 × 2 × 2 लिखें, तो भी गुणनखंड वही रहते हैं, सिर्फ क्रम बदलता है, इसलिए यह अद्वितीय है।

प्रश्न 16 (कठिन). क्या 105 के अभाज्य गुणनखंड 3, 5, 7 के अलावा और किसी अभाज्य संख्या के रूप में हो सकते हैं?
उत्तर – नहीं, अंकगणित की आधारभूत प्रमेय की अद्वितीयता के कारण, 105 के अभाज्य गुणनखंड केवल 3, 5 और 7 ही होंगे, चाहे उनका क्रम कुछ भी हो।

» 4^n के शून्य पर समाप्त होने की जाँच

प्रश्न 17 (आसान). क्या 10^n अंक शून्य पर समाप्त हो सकता है? क्यों?
उत्तर – हाँ, क्योंकि 10 = 2 × 5, तो इसके अभाज्य गुणनखंड में 5 आता है।

प्रश्न 18 (आसान). अगर कोई संख्या 0 पर समाप्त होती है, तो उसके अभाज्य गुणनखंड में कौन से अंक ज़रूर होने चाहिए?
उत्तर – 2 और 5

प्रश्न 19 (मध्यम). जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या 'n' के लिए, संख्या 8^n अंक शून्य पर समाप्त हो सकती है।
उत्तर – नहीं, क्योंकि 8^n = $(2^3)^n$ = 2^(3n)। इसके अभाज्य गुणनखंड में केवल 2 है, 5 नहीं।

» अभाज्य गुणनखंडन विधि से HCF और LCM ज्ञात करना

प्रश्न 20 (आसान). 8 और 12 का HCF ज्ञात कीजिए।
उत्तर – 4

प्रश्न 21 (आसान). 10 और 15 का LCM ज्ञात कीजिए।
उत्तर – 30

प्रश्न 22 (मध्यम). 12 और 18 का अभाज्य गुणनखंडन विधि से HCF और LCM ज्ञात कीजिए।
उत्तर – HCF = 6, LCM = 36

प्रश्न 23 (कठिन). संख्याओं 15, 20 और 25 का अभाज्य गुणनखंडन विधि से HCF और LCM ज्ञात कीजिए।
उत्तर – HCF = 5, LCM = 300

» अपरिमेय संख्याओं की पुनर्समीक्षा

प्रश्न 24 (आसान). क्या 7 एक अपरिमेय संख्या है?
उत्तर – हाँ, 7 एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 25 (आसान). क्या 0.5 एक अपरिमेय संख्या है?
उत्तर – नहीं, 0.5 एक परिमेय संख्या है क्योंकि इसे 1/2 लिखा जा सकता है।

प्रश्न 26 (मध्यम). क्या (पाई) एक अपरिमेय संख्या है?
उत्तर – हाँ, एक अपरिमेय संख्या है।

» प्रमेय 1.2: अभाज्य संख्या द्वारा विभाज्यता का गुणधर्म

प्रश्न 27 (आसान). क्या 3, 81 को विभाजित करता है? यदि हाँ, तो क्या 3, 9 को भी विभाजित करेगा?
उत्तर – हाँ, 3, 81 को विभाजित करता है (81 = 9^2), और हाँ, 3, 9 को भी विभाजित करेगा।

प्रश्न 28 (आसान). अभाज्य संख्या 5, संख्या 100 को विभाजित करती है। क्या 5, 10 को भी विभाजित करेगा?
उत्तर – हाँ, 5, 100 (10^2) को विभाजित करता है, इसलिए 5, 10 को भी विभाजित करेगा।

प्रश्न 29 (मध्यम). यदि 11, 121 को विभाजित करता है, तो क्या यह 'प्रमेय 1.2' के नियम का पालन करता है? कारण बताओ।
उत्तर – हाँ, यह पालन करता है। क्योंकि 11 एक अभाज्य संख्या है, और 121, 11 का वर्ग (11^2) है। प्रमेय कहती है कि अगर p (11) a^2 (121) को विभाजित करता है, तो p (11) a (11) को भी विभाजित करेगा, जो कि सच है।

प्रश्न 30 (कठिन). क्या संख्या 6, 36 को विभाजित करती है? तो क्या 6, 6 को भी विभाजित करती है? फिर भी, क्या यह प्रमेय 1.2 का उदाहरण है? क्यों नहीं?
उत्तर – हाँ, 6, 36 को विभाजित करती है, और हाँ, 6, 6 को भी विभाजित करती है। लेकिन यह प्रमेय 1.2 का उदाहरण नहीं है, क्योंकि प्रमेय 1.2 केवल अभाज्य संख्याओं के लिए है, और 6 एक भाज्य संख्या है।

» 2 की अपरिमेयता का प्रमाण (विरोधाभास द्वारा उपपत्ति)

प्रश्न 31 (आसान). 3 को अपरिमेय सिद्ध करने के लिए पहला चरण क्या होगा?
उत्तर – हम मान लेंगे कि 3 एक परिमेय संख्या है।

प्रश्न 32 (आसान). प्रमाण के दौरान अगर p^2 को 5 विभाजित करता है, तो प्रमेय 1.2 के अनुसार 5 किसे विभाजित करेगा?
उत्तर – 5, p को विभाजित करेगा।

प्रश्न 33 (मध्यम). सिद्ध कीजिए कि 5 एक अपरिमेय संख्या है।
उत्तर – उत्तर 2 के प्रमाण जैसा ही होगा, बस 2 की जगह 5 का प्रयोग होगा। माना 5 = a/b (सहअभाज्य)। $a^2 = 5b^2$। 5, a को वभिाजति करता है। a = 5c। $5b^2 = (5c)^2 \Rightarrow 5b^2 = 25c^2 \Rightarrow b^2 = 5c^2$। 5, b को वभिाजति करता है। अतः a और b का उभयनष्ठि गुणनखंड 5 है, जो वरिोधाभास है। इसलएि 5 अपरमिेय है।

प्रश्न 34 (कठिन). सिद्ध कीजिए कि 3 + 25 एक अपरिमेय संख्या है।
उत्तर – माना 3 + 25 एक परिमेय संख्या है। तो 3 + 25 = a/b (a, b सहअभाज्य, b 0)। पुनर्व्यवस्थित करने पर, 25 = a/b - 3 => 25 = (a - 3b)/b => 5 = (a - 3b)/(2b)। चूंकि a और b पूर्णांक हैं, (a - 3b)/(2b) एक परमिेय संख्या है। इसका मतलब है कि 5 एक परिमेय संख्या है। लेकिन हम जानते हैं कि 5 एक अपरिमेय संख्या है। यह एक विरोधाभास है। अतः हमारी मूल कल्पना गलत थी। इसलिए 3 + 25 एक अपरिमेय संख्या है।

» 3 की अपरिमेयता का प्रमाण

प्रश्न 35 (आसान). अगर a^2, 5 से विभाज्य है, तो a क्या 5 से विभाज्य होगा?
उत्तर – हाँ, होगा।

प्रश्न 36 (आसान). सह-अभाज्य पूर्णांकों का एक उदाहरण दो।
उत्तर – 3 और 5 (या कोई भी दो संख्याएँ जिनका 1 के अलावा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो)

प्रश्न 37 (मध्यम). अगर 2 = a/b है, तो a^2 किसके बराबर होगा?
उत्तर – $2b^2$

प्रश्न 38 (कठिन). सिद्ध कीजिए कि 5 एक अपरिमेय संख्या है। (यह 3 के समान ही सिद्ध होगा)
उत्तर – छात्रों को 3 के समान चरणों का पालन करने के लिए प्रोत्साहित करें।

» परिमेय और अपरिमेय संख्याओं के योग/अंतर/गुणन/भागफल का गुणधर्म

प्रश्न 39 (आसान). क्या 2 + 5 एक परिमेय संख्या है या अपरिमेय संख्या है?
उत्तर – अपरिमेय संख्या

प्रश्न 40 (आसान). क्या 72 एक परिमेय संख्या है या अपरिमेय संख्या है?
उत्तर – अपरिमेय संख्या

प्रश्न 41 (मध्यम). सिद्ध कीजिए कि 3 + 25 एक अपरिमेय संख्या है।
उत्तर – हल: मान लें 3 + 25 एक परिमेय संख्या है। तो, 3 + 25 = a/b (जहाँ a, b पूर्णांक, b0)। इसे 25 = a/b - 3 या 25 = (a - 3b)/b लिख सकते हैं। अब, 5 = (a - 3b)/(2b)। चूँकि a, b पूर्णांक हैं, तो (a - 3b)/(2b) एक परिमेय संख्या है। इसका मतलब 5 भी परिमेय है, जो कि विरोधाभास है क्योंकि 5 अपरिमेय है। अतः, हमारी मान्यता गलत है, और 3 + 25 एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 42 (कठिन). सिद्ध कीजिए कि 1/2 एक अपरिमेय संख्या है।
उत्तर – हल: मान लें 1/2 एक परिमेय संख्या है। तो, 1/2 = a/b (जहाँ a, b पूर्णांक, b0)। इसे 2 = b/a लिख सकते हैं। चूँकि a, b पूर्णांक हैं, तो b/a एक परिमेय संख्या है। इसका मतलब 2 भी परिमेय है, जो कि विरोधाभास है क्योंकि 2 अपरिमेय है। अतः, हमारी मान्यता गलत है, और 1/2 एक अपरिमेय संख्या है।

» (5 - 3) जैसी संख्याओं की अपरिमेयता का प्रमाण

प्रश्न 43 (आसान). सिद्ध कीजिए कि (2 + 3) एक अपरिमेय संख्या है।
उत्तर – उत्तर: सिद्ध करने के लिए, मान लें कि 2 + 3 = a/b। फिर 3 = a/b - 2 = (a - 2b)/b। चूंकि a, b पूर्णांक हैं, (a - 2b)/b परमिेय है, जसिका अर्थ है कि 3 परमिेय है। यह एक वरिोधाभास है क्योंकि 3 अपरमिेय है। अतः, हमारी कल्पना गलत है और 2 + 3 एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 44 (आसान). सिद्ध कीजिए कि (7 - 2) एक अपरिमेय संख्या है।
उत्तर – उत्तर: सिद्ध करने के लिए, मान लें कि 7 - 2 = a/b। फिर 2 = 7 - a/b = (7b - a)/b। चूंकि a, b पूर्णांक हैं, (7b - a)/b परमिेय है, जसिका अर्थ है कि 2 परमिेय है। यह एक वरिोधाभास है क्योंकि 2 अपरमिेय है। अतः, हमारी कल्पना गलत है और 7 - 2 एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 45 (मध्यम). सिद्ध कीजिए कि (3 - 57) एक अपरिमेय संख्या है।
उत्तर – उत्तर: सिद्ध करने के लिए, मान लें कि 3 - 57 = a/b। फिर 57 = 3 - a/b = (3b - a)/b। तो, 7 = (3b - a) / 5b। चूंकि a, b पूर्णांक हैं, (3b - a) / 5b परमिेय है, जसिका अर्थ है कि 7 परमिेय है। यह एक वरिोधाभास है क्योंकि 7 अपरिमेय है। अतः, हमारी कल्पना गलत है और 3 - 57 एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 46 (कठिन). सिद्ध कीजिए कि (3 + 5) एक अपरिमेय संख्या है। (संकेत: दोनों पक्षों का वर्ग करें)
उत्तर – उत्तर: मान लें 3 + 5 = a/b (परिमेय)। $(3 + 5)^2 = (a/b)^2$ => 3 + 5 + 215 = a^2/b^2 => 8 + 215 = a^2/b^2 => 215 = a^2/b^2 - 8 => 15 = $(a^2 - 8b^2)/2b^2$। चूंकि $(a^2 - 8b^2)/2b^2$ परमिेय है, 15 परमिेय होगा। यह विरोधाभास है क्योंकि 15 अपरिमेय है। अतः, 3 + 5 एक अपरिमेय संख्या है।

» (32) जैसी संख्याओं की अपरिमेयता का प्रमाण

प्रश्न 47 (आसान). सिद्ध कीजिए कि 53 एक अपरिमेय संख्या है।
उत्तर – 53 एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 48 (आसान). क्या 27 एक परिमेय संख्या है? कारण सहित बताइए।
उत्तर – नहीं, 27 एक अपरिमेय संख्या है क्योंकि 7 अपरिमेय है और किसी परिमेय संख्या (2) को अपरिमेय संख्या से गुणा करने पर अपरिमेय संख्या मिलती है।

प्रश्न 49 (मध्यम). सिद्ध कीजिए कि (2)/3 एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर – (2)/3 एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 50 (कठिन). सिद्ध कीजिए कि 4 - 32 एक अपरिमेय संख्या है। (यह प्रश्न पिछले कॉन्सेप्ट से भी जुड़ा है।)

उत्तर – 4 - 32 एक अपरिमेय संख्या है।

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का उपयोग करके 17 को 5 से भाग दें और a = bq + r के रूप में लिखें।

› हमें 17 को 5 से भाग देना है। यहाँ a = 17 और b = 5 है।

› 5 का पहाड़ा तब तक पढ़ें जब तक 17 से ज़्यादा न हो जाए: 5 × 1 = 5, 5 × 2 = 10, 5 × 3 = 15, 5 × 4 = 20।

› सबसे करीब और छोटा नंबर 15 है, जो 5 × 3 होता है।

› तो, भागफल (q) = 3।

› शेषफल (r) = 17 - 15 = 2।

› हम देखते हैं कि शेषफल 2, भाजक 5 से छोटा है (2 < 5)।

› तो, हम इसे a = bq + r के रूप में लिखेंगे: 17 = 5 × 3 + 2।

उत्तर – 17 = 5 × 3 + 2

उदाहरण 2. संख्या 210 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करें।

› पहले 210 को सबसे छोटी अभाज्य संख्या 2 से भाग देते हैं। 210 ÷ 2 = 105।

› अब 105 को देखते हैं। यह 2 से नहीं जाता, लेकिन 3 से जाता है। 105 ÷ 3 = 35।

› अब 35 को देखते हैं। यह 3 से नहीं जाता, लेकिन 5 से जाता है। 35 ÷ 5 = 7।

› आखिर में हमें 7 मिलता है, जो खुद एक अभाज्य संख्या है।

› तो 210 के अभाज्य गुणनखंड 2, 3, 5 और 7 हैं।

उत्तर – 210 = 2 × 3 × 5 × 7

उदाहरण 3. संख्या 32760 का अभाज्य गुणनखंडन गुणनखंड वृक्ष का उपयोग करके कीजिए।

› सबसे पहले 32760 को दो भागों में तोड़ते हैं, मान लो 10 × 3276.

› अब 10 को तोड़ते हैं 2 × 5. ये दोनों अभाज्य संख्याएँ हैं, तो इन शाखाओं पर रुक जाते हैं।

› फिर 3276 को तोड़ते हैं, मान लो 2 × 1638.

› 1638 को तोड़ते हैं 2 × 819.

› 819 को तोड़ते हैं, जैसे 3 × 273.

› 273 को तोड़ते हैं 3 × 91.

› और आखिर में 91 को तोड़ते हैं 7 × 13. अब 2, 3, 5, 7, 13 ये सभी अभाज्य संख्याएँ हैं।

› सारी अभाज्य संख्याओं को एक साथ लिख देते हैं जो सबसे निचली शाखाओं पर मिलीं।

उत्तर – तो 32760 = 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 5 × 7 × 13 = $2^3 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 \times 13^1$

उदाहरण 4. संख्या 36 का अभाज्य गुणनखंडन कीजिए और दिखाइए कि यह अद्वितीय है।

› पहले 36 को सबसे छोटी अभाज्य संख्या 2 से भाग देते हैं: 36 ÷ 2 = 18

› फिर 18 को 2 से भाग देते हैं: 18 ÷ 2 = 9

› अब 9 को 2 से भाग नहीं दे सकते, तो अगली अभाज्य संख्या 3 से देते हैं: 9 ÷ 3 = 3

› और आखिर में 3 को 3 से भाग देते हैं: 3 ÷ 3 = 1

› तो 36 के अभाज्य गुणनखंड हुए: 2 × 2 × 3 × 3 या $2^2 \times 3^2$

› अब अगर कोई इसे 3 × 2 × 3 × 2 लिखे, तो भी इसमें दो बार 2 और दो बार 3 ही हैं।

› क्रम बदलने से गुणनखंडों का सेट नहीं बदलता, इसलिए यह अद्वितीय है।

उत्तर – 36 = $2^2 \times 3^2$, और यह गुणनखंडन (अभाज्य संख्याओं के क्रम को छोड़कर) अद्वितीय है।

उदाहरण 5. जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या 'n' के लिए, संख्या 6^n अंक शून्य पर समाप्त हो सकती है।

› पहला कदम: कोई भी संख्या जो शून्य पर समाप्त होती है, वह 5 से विभाज्य होनी चाहिए।

› दूसरा कदम: इसका मतलब है कि उसके अभाज्य गुणनखंडन में 5 ज़रूर आना चाहिए।

› तीसरा कदम: अब हम 6^n के अभाज्य गुणनखंड करते हैं। 6^n = (2 × 3)^n = 2^n × 3^n.

› चौथा कदम: यहाँ हम देखते हैं कि 6^n के अभाज्य गुणनखंडों में केवल 2 और 3 ही हैं। 5 इसमें नहीं है।

› पाँचवाँ कदम: अंकगणित की आधारभूत प्रमेय की अद्वितीयता यह पक्का करती है कि 6^n के गुणनखंडन में 2 और 3 के अलावा कोई और अभाज्य गुणनखंड नहीं होगा।

› छठा कदम: क्योंकि 6^n के गुणनखंड में 5 नहीं आता, इसलिए यह 5 से विभाज्य नहीं है और कभी भी शून्य पर समाप्त नहीं हो सकता।

उत्तर – नहीं, 6^n कभी भी अंक शून्य पर समाप्त नहीं हो सकता।

उदाहरण 6. संख्याओं 6 और 20 का अभाज्य गुणनखंडन विधि से HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले, हम 6 के अभाज्य गुणनखंड लिखेंगे: 6 = 2 × 3।

› फिर, 20 के अभाज्य गुणनखंड लिखेंगे: 20 = 2 × 2 × 5 = 2^2 × 5।

› अब, HCF निकालने के लिए, हमें उभयनिष्ठ (common) अभाज्य गुणनखंड देखने हैं। यहाँ सिर्फ 2 ही उभयनिष्ठ है। 2 की सबसे छोटी घात 2^1 (जो 6 में है) है। तो, HCF(6, 20) = 2^1 = 2।

› LCM निकिालने के लिए, हमें सभी अभाज्य गुणनखंडों को देखना है (2, 3, 5) और उनकी सबसे बड़ी घात लेनी है। 2 की सबसे बड़ी घात 2^2 है (जो 20 में है), 3 की सबसे बड़ी घात 3^1 है (जो 6 में है), और 5 की सबसे बड़ी घात 5^1 है (जो 20 में है)।

› तो, LCM(6, 20) = 2^2 × 3^1 × 5^1 = 4 × 3 × 5 = 60।

› जाँच करें: HCF × LCM = 2 × 60 = 120। और संख्याओं का गुणनफल = 6 × 20 = 120।

› देखो, HCF × LCM = संख्याओं का गुणनफल। यह संबंध यहाँ सही साबित होता है।

उत्तर – HCF(6, 20) = 2 और LCM(6, 20) = 60

उदाहरण 7. क्या 9 एक अपरिमेय संख्या है?

› सबसे पहले, हम 9 का मान निकालेंगे।

› 9 का मान 3 होता है।

› अब हम देखेंगे कि क्या 3 को p/q के रूप में लिखा जा सकता है।

› हाँ, 3 को हम 3/1 के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ 3 और 1 पूर्णांक हैं और 1 शून्य नहीं है।

उत्तर – नहीं, 9 एक अपरिमेय संख्या नहीं है, यह एक परिमेय संख्या है।

उदाहरण 8. जाँच कीजिए कि क्या अभाज्य संख्या 7, 196 को विभाजित करती है। यदि हाँ, तो क्या 7, 14 को भी विभाजित करेगी?

› सबसे पहले, 196 को 7 से विभाजित करते हैं। 196 ÷ 7 = 28। हाँ, 7, 196 को पूरा-पूरा विभाजित करता है।

› अब देखते हैं कि 196 किसका वर्ग है। 196 = 14^2। यानी, a^2 = 196 और a = 14।

› प्रमेय 1.2 के अनुसार, यदि एक अभाज्य संख्या (यहाँ 7) a^2 (यहाँ 196) को विभाजित करती है, तो वह a (यहाँ 14) को भी विभाजित करेगी।

› अब जाँच करते हैं: 14 को 7 से विभाजित करते हैं। 14 ÷ 7 = 2। हाँ, 7, 14 को भी विभाजित करता है।

उत्तर – हाँ, अभाज्य संख्या 7, 196 को विभाजित करती है, और इसलिए प्रमेय 1.2 के अनुसार, 7, 14 को भी विभाजित करेगी।

उदाहरण 9. सिद्ध कीजिए कि 2 एक अपरिमेय संख्या है।

› पहला चरण: हम इसके विपरीत यह मान लेते हैं कि 2 एक परिमेय संख्या है।

› दूसरा चरण: अगर 2 एक परिमेय संख्या है, तो हम इसे p/q के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और q 0। साथ ही, हम यह भी मान लेते हैं कि p और q सहअभाज्य हैं, यानी उनमें 1 के अलावा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

› तो, $2 = p/q$

› तीसरा चरण: दोनों तरफ वर्ग करने पर:

› $(2)^2 = (p/q)^2$

› $2 = p^2/q^2$

› $2q^2 = p^2$ (इसे समीकरण 1 मान लो)

› चौथा चरण: समीकरण 1 से पता चलता है कि p^2, 2 से विभाजित है। और हमने प्रमेय 1.2 में पढ़ा है कि अगर एक अभाज्य संख्या किसी संख्या के वर्ग को विभाजित करती है, तो वह उस संख्या को भी विभाजित करती है। तो, अगर 2, p^2 को विभाजित करता है, तो 2, p को भी विभाजित करेगा।

› पांचवा चरण: अगर 2, p को विभाजित करता है, तो हम p को 2k के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ k कोई पूर्णांक है।

› छठा चरण: p का यह मान समीकरण 1 में रखने पर:

› $2q^2 = (2k)^2$

› $2q^2 = 4k^2$

› $q^2 = 2k^2$

› सातवाँ चरण: अब, इस समीकरण से पता चलता है कि q^2, 2 से विभाजित है। और प्रमेय 1.2 के अनुसार, अगर 2, q^2 को विभाजित करता है, तो 2, q को भी विभाजित करेगा।

› आठवाँ चरण: देखो, हमने शुरुआत में माना था कि p और q सहअभाज्य हैं, यानी उनमें 1 के अलावा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है। लेकिन यहाँ हमने सिद्ध कर दिया कि p भी 2 से विभाजित होता है और q भी 2 से विभाजित होता है। इसका मतलब है कि p और q दोनों का एक उभयनिष्ठ गुणनखंड 2 है।

› नवाँ चरण: यह इस बात का विरोधाभास है कि p और q सहअभाज्य हैं। यह विरोधाभास इसलिए उत्पन्न हुआ है क्योंकि हमने शुरुआत में गलत कल्पना कर ली थी कि 2 एक परिमेय संख्या है।

› निष्कर्ष: अतः, हमारी कल्पना गलत थी। 2 एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर – 2 एक अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण 10. सिद्ध कीजिए कि 3 एक अपरिमेय संख्या है।

› पहला कदम: इसके विपरीत मान लें कि 3 एक परिमेय संख्या है।

› दूसरा कदम: अगर 3 एक परिमेय संख्या है, तो हम इसे a/b के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ a और b पूर्णांक हैं, b 0, और a और b सह-अभाज्य हैं (मतलब, उनका 1 के अलावा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है)।

› तीसरा कदम: समीकरण $3 = a/b$ को वर्ग करने पर हमें मिलेगा $3 = a^2/b^2$। इसे ऐसे भी लिख सकते हैं: $3b^2 = a^2$।

› चौथा कदम: इस समीकरण का मतलब है कि a^2 संख्या 3 से विभाज्य है। हमने एक प्रमेय पढ़ा है कि अगर एक अभाज्य संख्या p, a^2 को विभाजित करती है, तो वह p, a को भी विभाजित करेगी। तो, अगर a^2, 3 से विभाज्य है, तो a भी 3 से विभाज्य होगा।

› पांचवा कदम: चूंकि a, 3 से विभाज्य है, हम a को 3c के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ c कोई पूर्णांक है।

› छठा कदम: अब $a = 3c$ के इस मान को हमारे समीकरण $3b^2 = a^2$ में रखते हैं। हमें मिलेगा $3b^2 = (3c)^2$, यानी $3b^2 = 9c^2$।

› सातवां कदम: इस समीकरण को सरल करने पर $b^2 = 3c^2$ मिलता है। इसका मतलब है कि b^2 भी 3 से विभाज्य है। और फिर से उसी प्रमेय का उपयोग करके, अगर b^2, 3 से विभाज्य है, तो b भी 3 से विभाज्य होगा।

› आठवां कदम: अब देखो, हमने शुरुआत में माना था कि a और b सह-अभाज्य हैं, यानी उनका 1 के अलावा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है। लेकिन यहाँ हमने देखा कि a भी 3 से विभाज्य है और b भी 3 से विभाज्य है। इसका मतलब है कि a और b दोनों का एक उभयनिष्ठ गुणनखंड 3 है।

› नवां कदम: यह हमारी शुरुआती कल्पना का विरोधाभास है कि a और b सह-अभाज्य हैं। यह विरोधाभास इसलिए आया क्योंकि हमने गलत मान लिया था कि 3 एक परिमेय संख्या है।

› दसवां कदम: अतः, हमारा निष्कर्ष यह है कि 3 एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर – सिद्ध हो गया कि 3 एक अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण 11. सिद्ध कीजिए कि 5 - 3 एक अपरिमेय संख्या है।

› पहला कदम वही है, हम विरोधाभास विधि का इस्तेमाल करेंगे। मान लो कि 5 - 3 एक परिमेय संख्या है।

› अगर यह परिमेय संख्या है, तो इसे हम a/b के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ a और b पूर्णांक हैं और b 0। मतलब, 5 - 3 = a/b।

› अब, हम 3 को एक तरफ रखेंगे और बाकी सबको दूसरी तरफ ले जाएंगे। तो, 5 - a/b = 3।

› देखो, a और b पूर्णांक हैं, तो a/b एक परिमेय संख्या होगी, है ना? और 5 भी एक परिमेय संख्या है।

› तो, 5 - a/b भी एक परिमेय संख्या होगी, क्योंकि दो परिमेय संख्याओं का अंतर हमेशा परिमेय होता है।

› इसका मतलब यह हुआ कि 3 भी एक परिमेय संख्या है, क्योंकि यह 5 - a/b के बराबर है।

› लेकिन बच्चों, हम तो पहले ही सिद्ध कर चुके हैं कि 3 एक अपरिमेय संख्या है! यह तो विरोधाभास हो गया।

› यह विरोधाभास इसलिए आया क्योंकि हमने शुरुआत में गलत मान लिया था कि 5 - 3 एक परिमेय संख्या है।

› तो हमारी कल्पना गलत थी। इसका मतलब, 5 - 3 वास्तव में एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर – अतः 5 - 3 एक अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण 12. सिद्ध कीजिए कि (3 + 25) एक अपरिमेय संख्या है।

› पहला कदम: हम 'विरोधाभास द्वारा उपपत्ति' का उपयोग करेंगे। मान लीजिए (3 + 25) एक परिमेय संख्या है।

› दूसरा कदम: अगर यह परिमेय है, तो हम इसे a/b के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ a और b सह-अभाज्य पूर्णांक हैं और b 0। तो, 3 + 25 = a/b

› तीसरा कदम: अब, हम 5 को समीकरण के एक तरफ अलग करेंगे।

› पहले 3 को दाईं ओर ले जाएंगे: 25 = a/b - 3

› फिर 25 = (a - 3b)/b

› अब 2 से भाग देंगे: 5 = (a - 3b) / 2b

› चौथा कदम: ध्यान से देखो। क्योंकि a और b पूर्णांक हैं, तो (a - 3b) भी एक पूर्णांक होगा, और 2b भी एक पूर्णांक होगा (और 2b 0)।

› तो, (a - 3b) / 2b एक परिमेय संख्या है। इसका मतलब है कि 5 भी एक परिमेय संख्या होनी चाहिए।

› पांचवां कदम: लेकिन हम जानते हैं कि 5 एक अपरिमेय संख्या है। यह एक स्थापित तथ्य है।

› तो, हमें यहाँ एक विरोधाभास मिला। हमने जो माना था कि (3 + 25) एक परिमेय संख्या है, वह गलत साबित हो गया।

› छठा कदम: अतः, हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि (3 + 25) एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर – अतः, (3 + 25) एक अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण 13. सिद्ध कीजिए कि 75 एक अपरिमेय संख्या है।

› सबसे पहले, हम यह मान लेते हैं कि 75 एक परिमेय संख्या है।

› अगर 75 एक परिमेय संख्या है, तो हम इसे p/q के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ p और q सहअभाज्य पूर्णांक हैं और q 0। तो, 75 = p/q।

› अब हम 5 को अकेला करेंगे। इसके लिए, 7 को समीकरण के दूसरी तरफ ले जाएँगे। तो, 5 = p/(7q) हो जाएगा।

› अब देखो, p, q और 7 सभी पूर्णांक हैं। इसका मतलब है कि p/(7q) एक परिमेय संख्या होगी, क्योंकि यह पूर्णांकों का अनुपात है।

› अगर p/(7q) एक परिमेय संख्या है, तो इसके बराबर में जो 5 है, उसे भी परिमेय होना पड़ेगा।

› लेकिन बच्चों, हम जानते हैं कि 5 एक अपरिमेय संख्या है। ये बात हमने पहले ही सिद्ध की हुई है।

› यहाँ एक विरोधाभास उत्पन्न हो गया है - 5 एक साथ परिमेय और अपरिमेय दोनों नहीं हो सकता।

› यह विरोधाभास हमारी इस गलत कल्पना के कारण आया है कि 75 एक परिमेय संख्या है।

› इसलिए, हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि हमारी कल्पना गलत थी और 75 वास्तव में एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर – 75 एक अपरिमेय संख्या है।

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

• यह अवधारणा आगे चलकर HCF निकालने के लिए 'यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म विधि' में उपयोग होगी, जो बोर्ड परीक्षा में 2-3 अंक का प्रश्न अक्सर आता है।

• यह प्रमेय सीधे सवाल के रूप में कम आती है, लेकिन HCF और LCM निकालने के लिए और अपरिमेय संख्याओं को सिद्ध करने के लिए इसका प्रयोग होता है। इसलिए इसे अच्छे से समझना ज़रूरी है।

• यह टॉपिक बोर्ड परीक्षा में अक्सर 2-3 नंबर के प्रश्नों में आता है, जहाँ आपको किसी संख्या का अभाज्य गुणनखंडन गुणनखंड वृक्ष बनाकर दिखाना होता है। स्पष्टता और सही अभाज्य संख्याएँ ढूंढना महत्वपूर्ण है।

• अंकगणित की आधारभूत प्रमेय की परिभाषा को अच्छे से याद कर लो और 'अद्वितीयता' का मतलब ठीक से समझो। यह सीधे-सीधे 1-2 नंबर के सवाल में आ सकती है।

• यह प्रश्न बोर्ड परीक्षाओं में 2-3 अंक में अक्सर आता है। हर कदम को स्पष्ट रूप से लिखना और 'अंकगणित की आधारभूत प्रमेय' का जिक्र करना न भूलें।

• यह विधि और इसका संबंध, HCF × LCM = a × b, बोर्ड परीक्षाओं में अक्सर 2-3 नंबर के सीधे सवाल के रूप में पूछा जाता है। एक प्रश्न तो ज़रूर आता है, इसलिए इसे अच्छे से समझना बहुत ज़रूरी है।

• यह अवधारणा बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है क्योंकि 2, 3, 5 जैसी संख्याओं को अपरिमेय सिद्ध करने वाले प्रश्न अक्सर आते हैं।

• यह प्रश्न बोर्ड परीक्षा में 3 या 4 अंकों में सीधे-सीधे पूछा जाता है। स्टेप-बाय-स्टेप लिखना और 'सह-अभाज्य' शब्द का उल्लेख करना न भूलें।

• इस भाग से 'सिद्ध कीजिए कि...' वाले प्रश्न अक्सर 3-4 अंक के लिए आते हैं, जहाँ आपको विरोधाभास विधि का उपयोग करके अपरिमेय सिद्ध करना होता है। उदाहरण 6 और 7 जैसे प्रश्नों का खूब अभ्यास करें।

• यह प्रश्न बोर्ड परीक्षा में 3 से 4 नंबर का पक्का आता है, इसलिए इसके हर स्टेप को अच्छे से लिखकर अभ्यास कर लेना। हर बार एक अपरिमेय संख्या को अकेले एक तरफ लाने पर ध्यान देना।

• बोर्ड परीक्षाओं में 32 या 75 जैसी संख्याओं की अपरिमेयता सिद्ध करने का प्रश्न 2 या 3 अंक में ज़रूर आता है। एक भी स्टेप छूटना नहीं चाहिए, पूरा तरीका लिखना ज़रूरी है।

एक नज़र में रिवीज़न

› यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म: a = bq + r, 0 r < b

› भाज्य = अभाज्य गुणनखंडों का अद्वितीय गुणनफल।

› भाज्य संख्या = अभाज्य संख्याओं का गुणनफल; गुणनखंड वृक्ष से ज्ञात करें।

› प्रत्येक भाज्य संख्या का अभाज्य गुणनखंडन क्रम के बिना अद्वितीय होता है।

› शून्य पर समाप्त होने हेतु अभाज्य गुणनखंड में 2 और 5 ज़रूरी।

› HCF: उभयनष्ठि गुणनखंडों की न्यूनतम घातों का गुणनफल। LCM: सभी गुणनखंडों की अधकितम घातों का गुणनफल।

› अपरिमेय संख्याएँ = p/q रूप में नहीं लिखी जा सकने वाली संख्याएँ।

› 3 अपरिमेय है, विरोधाभास विधि से सिद्ध करें: 3=a/b, a,b सह-अभाज्य।

› परिमेय + अपरिमेय = अपरिमेय (योग/अंतर/गुणन/भागफल)

› विरोधाभास द्वारा उपपत्ति से (परिमेय ± अपरिमेय) संख्याओं की अपरिमेयता सिद्ध करना।

› परिमेय मानें, को अलग करें, विरोधाभास सिद्ध करें।